

2027학년도 Z축 모의고사 0회

수학 영역 정답표

공통 과목						선택 과목		
						미적분		
문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점
1	①	2	12	①	4	23	④	2
2	②	2	13	③	4	24	②	3
3	④	3	14	①	4	25	③	3
4	①	3	15	③	4	26	④	3
5	⑤	3	16	6	3	27	①	3
6	①	3	17	5	3	28	③	4
7	④	3	18	22	3	29	81	4
8	②	3	19	14	3	30	53	4
9	④	4	20	6	4			
10	②	4	21	148	4			
11	①	4	22	15	4			

0회 Q&A

질문 · 다른 풀이 · 문항 이야기
(캡처 후 꼭 눌러도 이동 가능)

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 4^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 2
 \end{aligned}$$

정답 : ①

$$\begin{aligned}
 2. \quad & f'(x) = 3x^2 + 8x \\
 & f'(2) = 12 + 16 = 28
 \end{aligned}$$

정답 : ②

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \sum_{k=1}^7 a_k = A, \sum_{k=1}^7 b_k = B \text{ 라고 둔다.} \\
 & 3A + B = 21, A + B = 9 \\
 & A = 6, B = 3
 \end{aligned}$$

정답 : ④

4. 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이기 때문에

$$f(1^-) = f(1) = f(1^+) \text{ 이다.}$$

$$6 + 3 = -4 + a$$

$$a = 13$$

정답 : ①

$$\begin{aligned}
 5. \quad & f'(x) = 6(x^2 - 3x + 6) + (6x - 5)(2x - 3) \\
 & f'(1) = 6 \times 4 + 1 \times (-1) = 23
 \end{aligned}$$

정답 : ⑤

$$6. \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 인 } \theta \text{에 대하여 } \cos \theta < 0 \text{이다.}$$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

정답 : ①

$$\begin{aligned}
 7. \quad & f'(x) = 3x^2 - 6ax - 6 \\
 & f'(-1) = 3 + 6a - 6 = 0 \\
 & a = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 3x - 6 \\
 &= 3(x+1)(x-2)
 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이다.

$$f(2) = 8 - 6 - 12 + 12 = 2$$

정답 : ④

8. $\overline{AC} = x$

라고 둔다.

$$6^2 + x^2 - 2 \times 6 \times x \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 8^2$$

정리하면 $x^2 + 3x - 28 = 0$

$x > 0$ 이기 때문에 $x = 4$

정답 : ②

9. 두 점 P, Q가 원점을 출발한다 하였다.

따라서 두 점의 시각 t 에서의 위치를 각각

$x_1(t), x_2(t)$ 라 한다면

$x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^3 - 2t^2$ 이다.

두 점의 위치가 같아지는 시각 t 를 구하기 위해
이 둘을 연립한다.

$$t^2 = t^3 - 2t^2 \quad t = 3$$

정답 : ④

10. $\log_{16} a + \log_2 b = 2$

$$= \log_2 a^{\frac{1}{4}} + \log_2 b = \log_2 a^{\frac{1}{4}} b$$

따라서 $a^{\frac{1}{4}} b = 4. \quad b = 4 \times a^{-\frac{1}{4}}$

그리고 문제에서 $\log_a b = \frac{3}{4}$ 라고 하였으므로

$$b = a^{\frac{3}{4}}.$$

$b = 4 \times a^{-\frac{1}{4}}$ 와 연립하면

$$a = 4$$

$$b = a^{\frac{3}{4}} = 4^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

최종적으로 $\frac{a}{b} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

정답 : ②

11. 먼저 $a_1 a_5 - 4a_3 = 5$ 를 해석한다.

$a_1 a_5 = (a_3)^2$ 이기 때문에 $(a_3)^2 - 4a_3 - 5 = 0$

$$a_3 = -1 \text{ or } 5$$

다음으로 $a_3 a_7 + 6a_5 + 14 = 5$ 를 해석한다.

$a_3 a_7 = (a_5)^2$ 이기 때문에 $(a_5)^2 + 6a_5 + 9 = 0$

$$a_5 = -3$$

$a_3 = 5$ 이고 동시에 $a_5 = -3$ 라면

$$r^2 = \frac{a_5}{a_3} = -\frac{3}{5}$$

이 되어 실수인 공비 r 가 존재하지 않는다.

따라서 $a_3 = -1, a_5 = -3$ 이다.

$$a_6 = \pm 3\sqrt{3}$$

따라서 최종 정답은 27

정답 : ①

12.

조건 (나)에 의해 $n=1$ 을 대입한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$$

의 값이 존재해야 하기 때문에

$$f(2) = 0$$

이다.

$$|f(x)| = g(x)$$

라 두면

$$g(2) = 0$$

이다.

한편 조건 (가)에 의해 $g(x)$ 는 이차함수이고

$$g(x) = |f(x)|$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 0보다 크거나 같아야 한다.

즉

$$g(x) \geq 0, g(2) = 0$$

이기 때문에 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이면서 x 축에 접함을 알 수 있다.

$$\text{즉, } g(x) = a(x-2)^2 \quad (a > 0).$$

이때, 함수 $f(x)$ 는 미분 가능한 함수이므로 연속이고,

$a(x-2)^2 > 0 \ (x \neq 2)$ 이므로 $x=2$ 를 제외한 구간에서는 함수 $f(x)$ 의 부호가 바뀔 수 없다.

또한 문제에서 $f(0) = 2 > 0$ 이므로 $x < 2$ 에서

$$f(x) = a(x-2)^2 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a(x-2)^2}{(x-2)^2} = a$$

이다.

그런데 조건 (나)에 의해 $n=2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2}$$

의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $x > 2$ 에서 $f(x)$ 가 $a(x-2)^2$ 라면 좌우의 극한값이 모두 a 가 되어 극한값이 존재하게 되므로, $x > 2$ 에서는 부호가 반대여야 한다.

즉,

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 & (x < 2) \\ -a(x-2)^2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

이다.

$$f(0) = 2$$

이므로

$$a = \frac{1}{2}$$

따라서

$$f(5) = -\frac{1}{2} \times 3^2 = -\frac{9}{2}$$

정답 : ①

13.

$$g(x) = (x-1)f(x)$$

라 둔다.

$$g(1) = 0.$$

$$g'(x) = (x-1)f'(x) + f(x)$$

이기 때문에

$$\int_1^5 |g'(x)| dx = 8$$

임을 알 수 있다.

동시에 $f(3) = 2, f(5) = 0$ 이기 때문에

$$g(3) = 4, g(5) = 0$$

이다.

$$\int_1^5 |g'(x)| dx = 8$$

를 해석해 보면 함수 $y = g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 $x = 5$ 까지 움직인 거리가 8이라는 것을 알 수 있다.

와중에 $g(1) = 0, g(3) = 4, g(5) = 0$ 이기 때문에 함수 $g(x)$ 가 구간 $[1, 3]$ 에서 감소하지 않고, 구간 $[3, 5]$ 에서 증가하지 않는다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분 가능하기 때문에 $g(x)$ 역시 실수 전체의 집합에서 미분 가능하다.

따라서 $g'(3) = 0$ 이다.

$$\neg. \quad g'(x) = (x-1)f'(x) + f(x)$$

$$g'(3) = 2f'(3) + f(3)$$

$$= 2f'(3) + 2 = 0$$

따라서 $f'(3) = -1$

그은 참이다.

ㄴ. 앞서 말한 대로 함수 $g(x)$ 가 구간 $[3, 5]$ 에서 증가하지 않기 때문에 $g'(4) \leq 0$ 이다.

$3f'(4) + f(4) \leq 0$ 이기 때문에

$$f'(4) \leq -\frac{1}{3}f(4) \text{이다.}$$

ㄴ은 거짓

ㄷ. 앞에서 $\neg$ 에 의해 $f'(3) = -1$. 이다.

또한 $f(2) < 2 = f(3)$ 이므로 평균값 정리에 의해

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} > 0$$

인 실수 c 가 구간 $(2, 3)$ 에 존재한다.

$f'(c) > 0$ 이므로 c 의 오른쪽에서 $f(c)$ 보다 큰 함수값을 갖는 점이 존재하고, $f'(3) < 0$ 이므로 3의 왼쪽에서 $f(3)$ 보다 큰 함수값을 갖는 점이 존재한다.

따라서 연속함수 $f(x)$ 는 구간 $[c, 3]$ 에서 양 끝점이 아닌 내부점에서 최대값을 가지므로 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극대인 실수 a 가 구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ은 참이다.

정답 : ③

14.

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 원주각의 성질에 의해

$$\angle AEB = 90^\circ$$

$\overline{AB} = 10$, $\overline{AE} = 6$ 이기 때문에 직각삼각형 ABE에서

$$BE = \sqrt{(\overline{AB})^2 - (\overline{AE})^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

또 점 E는 AC위에 있으므로 BE, AC는 서로 수직이다.

직각삼각형 BEC에서

$$\overline{EC} = \sqrt{(2\sqrt{65})^2 - 8^2} = \sqrt{260 - 64} = 14$$

$$\text{따라서 } \overline{AC} = 20$$

점 D는 $\overline{AB}$ 를 2:1로 외분하므로

$$\overline{DB} = \overline{AB} = 10$$

한편, 직각삼각형 ABE에서

$$\cos \angle BAC = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인 법칙을 적용하면

$$\overline{CD} = 8\sqrt{5}$$

점 A에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 G라고 하자.

$$\overline{AD} = \overline{AC}$$

이기 때문에 삼각형 ACD는 이등변삼각형이다.

따라서

$$\overline{AG} = \sqrt{20^2 - (4\sqrt{5})^2} = 8\sqrt{5}$$

삼각형 ADG와 삼각형 BDF는 두 각의 크기가 각각 같은 닮음이고,

$$\overline{AD} : \overline{BD} = 20 : 10$$

이므로

$$\overline{AG} : \overline{BF} = 2 : 1$$

따라서

$$\overline{BF} = \frac{1}{2} \times \overline{AG} = 4\sqrt{5}$$

정답 : ①

15.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

이다.

따라서 조건 (가)를

$$f(1 - \sin^2 x) + |f(1 + \sin^2 x)| = 0$$

로 다시 쓸 수 있다.

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

이기 때문에

$$\sin^2 x = t$$

로 치환한다면

$$f(1 - t) + |f(1 + t)| = 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

임을 알 수 있다.

양 변을 제곱하면

$$\{f(1 - t)\}^2 = \{f(1 + t)\}^2$$

이므로

$$(f(1 - t) - f(1 + t))(f(1 - t) + f(1 + t)) = 0 \\ (0 \leq t \leq 1)$$

즉, 좌변은 t 에 대한 두 다항식의 곱이고 이 곱이 $0 \leq t \leq 1$ 에서 항상 0이므로 두 다항식중 하나는 항등적으로 0이다.

$$f(1 - t) = f(1 + t) \quad (0 \leq t \leq 1) \rightarrow x = 1 \text{ 선대칭}$$

$$f(1 - t) + f(1 + t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \rightarrow \\ (1, 0) \text{ 점대칭}$$

하지만 $f(x)$ 는 사차함수이므로 두 번째 경우(점대칭형)는 불가능하다.

[증명]

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.

$f(1 - t) + f(1 + t)$ 은 최고차항의 계수가 2인 사차함수이므로 특정 구간에서 항등적으로 그 값이 0(상수)이 될 수 없다.

다음으로 $f(0)$ 과 $f(1)$ 의 값을 특정해야 한다.

$$f(1 - t) + |f(1 + t)| = 0$$

가 $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 실수 t 에서 만족하기 위해서는 앞에서 구했듯이 $f(x)$ 가 $x = 1$ 대칭이어야 하고,

$$f(1 - t) - f(1 + t) = 0$$

이어야 한다.

즉, $0 \leq t \leq 1$ 에서 $f(1 + t) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(1) \leq 0, f(2) \leq 0$$

그리고, 함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, 2)$ 에서 $x = 1$ 대칭이므로

$$f(0) \leq 0$$

조건 (나)에 의하면 $f(0) + f(1) = 0$ 이다.

하지만 $f(0) \leq 0, f(1) \leq 0$ 이기 때문에

$$f(0) = f(1) = 0$$

따라서 $f(x) = x(x - 1)^2(x - 2)$

$$f(3) = 3 \times 2^2 \times 1 = 12$$

정답 : ③

$$16. \quad 2^{2x-12} = 2^{-4x+24}$$

$$2x-12 = -4x+24$$

$$6x = 36, x = 6$$

정답 : 6

$$17. \quad f(x) = \frac{7}{3}x^3 + 2x^2 + C$$

$$f(0) = \frac{2}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

$$f(1) = \frac{7}{3} + 2 + \frac{2}{3} = 5$$

정답 : 5

$$18. \quad a_3 + a_9 = 2a_6 = 12, \quad a_6 = 6$$

$$d = a_7 - a_6 = 10 - 6 = 4$$

$$a_{10} = a_7 + 3d = 10 + 4 \times 3 = 22$$

정답 : 22

19.

$$y' = 3x^2 - 12x - 5, \quad y'(1) = 3 - 12 - 5 = -14$$

곡선 y 의 점 t 에서의 접선의 방정식을 $f(x)$ 라

하면

$$f(x) = y'(t)(x-t) + y(t)$$

$t = 1$ 대입

$$f(x) = -14(x-1) + 0$$

$$y\text{절편} = 14$$

정답 : 14

20.

방정식

$$f(g(x)) = x, \quad g(f(x)) = x$$

를 각각 정리하자.

먼저

$$f(g(x)) = f(x-b) = 3^{x-b} - (x-b)$$

이므로

$$3^{x-b} - x + b = x$$

따라서

$$3^{x-b} + b = 2x$$

또

$$g(f(x)) = f(x) - b = 3^x - x - b$$

이므로

$$3^x - x - b = x$$

따라서

$$3^x - b = 2x$$

그러므로

$$(가) = 2x$$

이제 두 함수

$$y = 3^{x-b} + b, \quad y = 3^x - b$$

의 그래프를 비교하자.

$y = 3^x - b$ 를 x 축 방향으로 p , y 축 방향으로 q 만큼
평행이동하면

$$y - q = 3^{x-p} - b$$

이므로

$$p = b, \quad q = 2b$$

이고

$$(나) = \frac{q}{p} = 2$$

두 그래프 사이의 평행이동은

$$(x, y) \rightarrow (x+b, y+2b)$$

이고, 직선 $y = 2x$ 위의 점 $(x, 2x)$ 를 이렇게
이동하면

$$(x+b, 2x+2b) = (x+b, 2(x+b))$$

이므로 여전히 직선 $y = 2x$ 위에 있다.

즉 직선 $y = 2x$ 는 이 평행이동에 의해 자기 자신과
일치한다.

방정식

$$3^x - b = 2x$$

의 서로 다른 실근이 α, β 일 때, $y = 3^{x-b} + b$ 와
 $y = 2x$ 의 두 교점의 x 좌표는

$$\alpha + b, \beta + b$$

이다. 그런데 두 방정식의 공통인 실근이 정확히
하나이고 $b > 0$ 이므로

$$\beta = \alpha + b$$

따라서

$$(다) = \beta - \alpha = b$$

최종 정답은

$$p(r) + q(r) = 4 + 2 = 6$$

정답 : 6

21.

조건 (가)의 부등식의 왼쪽은

‘함수 $y = g(x)$ 의 $x = g(t)$ 에서의 접선의 방정식’을 의미한다.

한편, 조건 (가)는 모든 실수 x 에 대하여 부등식을 만족해야 하는 것이지만

그 이전에 모든 실수 x 에 대하여 극한값이 존재해야 한다.

[1] $t = 0^-$)

$$\begin{aligned} & g'(g(t))(x - g(t)) + g(g(t)) \\ &= g'(-2)(x + 2) + g(-2) \\ &= 2x - 6 \end{aligned}$$

즉, $t \rightarrow 0^-$ 에서 얻어지는 부등식 왼쪽 함수는

$$y = 2x - 6$$

[2] $t = 0^+$)

먼저 $g(0)$ 의 부호를 결정한다.

조건 (나)에서 $g(g(0)) = 2$

만약 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이라면

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -2$$

그런데

$$g(g(0)) = g(-2) = -10$$

이 되어 조건 (나)와 모순이다.

결론적으로 $g(t)$ 가 $t = 0$ 에서 불연속이고,

좌극한과 우극한에서 나타나는 두 방정식이 모든 실수 x 에 대해서 동일해야 함으로

조건 (가)는

함수 $g(x)$ 가 공통접선을 가져야 한다는 것을 알려준다.

($x = g(0^-)$, $x = g(0^+)$ 에서의 접선의 방정식이 동일해야 한다.)

한편, $x < 0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 이차함수 특성상 $x = -2$ 를 제외한 실수 x 에서 $y = 2x - 6$ 의 접선을 만들 수 없는데, $g(0^+) \neq -2$ 임으로

$g(0^+) \geq 0$ 이어야 함을 알 수 있다.

결론적으로 $x = f(0) > 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 접선이

$$y = 2x - 6$$

이라는 뜻이다.

접점의 y 좌표는 조건 (나)에 의해 2 이므로

$$2 = 2f(0) - 6 \Rightarrow f(0) = 4$$

그러므로

$$f(4) = 2, \quad f'(4) = 2$$

직선 $y = 2x - 6$ 은 $y = f(x)$ 에 $x = 4$ 에서 접한다.

결론적으로, 모든 실수 x 에 대하여

$$2x - 6 \leq g(x)$$

동시에 $x = 4$ 에서 $y = 2x - 6$ 에 접해야 함으로

모든 $x \geq 0$ 에 대하여

$$g(x) = 2x - 6 + (x - 4)^2(x - a) \quad (a < 0)$$

임을 알 수 있다. $g(0) = f(0) = 4$ 이기 때문에

$$a = -\frac{5}{8}$$

$$f(8) = 148$$

정답 : 148

22.

먼저, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 하자.

조건 (나)에 의해 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_5 \leq S_n \leq 0$$

이다.

먼저 어떤 항 a_n 이 양수라고 하자.

조건 (가)에 의해 $a_n \geq 0$ 이면

$$a_{n+1} = a_n$$

이므로 그 이후의 모든 항은 같은 양수가 된다.

따라서 S_n 은 계속 증가하여 충분히 큰 n 에 대하여 $S_n > 0$ 이 되므로 조건 (나)에 모순이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 양수인 항을 가질 수 없다.

한편, $a_n < 0$ 인 동안에는

$$a_{n+1} = a_n + k^2 + 2k$$

이고, 모든 양수 k 에 대하여 $k^2 + 2k > 0$ 이므로 항의 값은 계속 증가한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 어느 항에서 반드시 0이 되어야 한다.

이제 조건 (가)에 따라 항을 차례로 구해 보자.

$$a_1 = -k - 2 \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + k^2 + 2k \\ &= k^2 + k - 2 \end{aligned}$$

$$= (k+2)(k-1)$$

$a_2 = 0$ 이 되려면 $k = 1$ 이다.

또,

$$\begin{aligned} a_3 &= 2k^2 + 3k - 2 \\ &= (k+2)(2k-1) \end{aligned}$$

이므로 $a_3 = 0$ 이 되려면 $k = \frac{1}{2}$ 이다.

이와 같이 계산하면

$$a_{m+1} = 0$$

이 되는 양수 k 는

$$k = \frac{1}{m}$$

의 꼴임을 알 수 있다.

실제로

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_1 + md \\ &= -k - 2 + m(k^2 + 2k) \\ &= (k+2)(mk-1) \end{aligned}$$

이므로 $a_{m+1} = 0$ 일 때, $k = \frac{1}{m}$ 이다.

따라서 가능한 k 는

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

이다.

이때, $a_{m+1} = 0$ 이면

$$a_1, a_2, \dots, a_m < 0$$

이고, 그 이후의 모든 항은 0이다.

따라서 S_n 은

$$S_1 > S_2 > \dots > S_m$$

이고,

$$S_m = S_{m+1} = S_{m+2} = \dots$$

이다.

따라서 가능한 k 는

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

이고

최종 정답은 15

정답 : 15

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

따라서 정답은 $\frac{1}{2}$

정답 : ④

24.

$$\int \ln x + 1 dx = x \ln x - x + x = x \ln x$$

$$4 \ln 4 - 1 \ln 1 = 8 \ln 2$$

정답 : ②

25. 주어진 조건에서

$$\sqrt{(4n^2 + 5)} < a_n < 2n + 2$$

이고, $n > 0$ 이므로 각 변을 n 으로 나누면

$$\sqrt{4 + \frac{5}{n^2}} < \frac{a_n}{n} < 2 + \frac{2}{n}$$

$$\text{이 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{5}{n^2}} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{n}\right) = 2$$

이므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$$

이제 구하고자 하는 극한에서 분자와 분모를 n^2 로 나누면

$$\frac{na_n + 3n^2}{(a_n + 3)^2} = \frac{\frac{a_n}{n} + 3}{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{3}{n}\right)^2}$$

따라서, $n \rightarrow \infty$ 을 취하면

$$\frac{2+3}{(2+0)^2} = \frac{5}{4}$$

정답 : ③

26.

곡선 $y = \frac{1}{x-2}$ 은 직선 $y = x-2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $A(a, \frac{1}{a-2})$ 를 $y = x-2$ 에 대하여

대칭이동 한 점 역시 곡선 $y = \frac{1}{x-2}$ 위에 있다.

주어진 곡선과 직선을 x 축 방향으로 -2 만큼 평행이동하여도 넓이는 변하지 않는다.

점 A 를 평행이동한 점을 A' 라 하고, 점 A' 의 x 좌표를 b 라 하면

$$b = a - 2$$

평행이동한 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 은 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이므로, 점 B 를 평행이동한 점의 x 좌표는 $\frac{1}{b}$ 이다.

따라서 주어진 부분의 넓이 S 는

$$S = \int_{\frac{1}{b}}^b \frac{1}{x} dx = 2 \ln b$$

이다. $S = 2 \ln 2$ 이므로 $b = 2$

따라서

$$a = 4$$

정답 : ④

27.

함수

$$f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + ax \quad (x \geq 0)$$

를 미분하면

$$f'(x) = 2x - 4\sqrt{x} + a$$

이다.

f 의 역함수가 존재하려면 f 가 $x \geq 0$ 에서 1:1이어야 한다.

$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

이고, 연속함수이므로 f 는 증가해야 한다.

따라서 모든 $x \geq 0$ 에서

$$f'(x) \geq 0$$

이어야 한다.

한편, $f'(x) > 0$ 이면,

f 의 역함수 g 는 모든 양의 실수에서 미분 가능하다.

따라서 $x = k$ 에서 미분이 불가능하려면 $f'(x) = 0$ 인 실수 x 가 하나 이상 존재해야 한다.

결론적으로 $f'(x)$ 가 $f'(x) \geq 0$ 이면서 x 축에 접해야 한다.

$$f'(x) = 2(\sqrt{x}-1)^2 + a - 2$$

로 정리할 수 있으므로 $a = 2$.

$f'(1) = 0$ 이고 역함수 g 가 미분 불가능한 점의 x 좌표는

$$k = f(1) = \frac{1}{3}$$

따라서

$$12k = 4$$

그러므로

$$f(12k) = f(4) = \frac{8}{3}$$

정답 : ①

28.

$\int_0^x tf(x-t)dt$ 에 관하여.

$$T(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

라고 둔 뒤 $x-t=k$ 로 치환 후 정리하면

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(x-t)dt \\ = \int_0^x (x-k)f(k)dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-k)f(k)dk \\ = x \int_0^x f(k)dk - \int_0^x kf(k)dk \end{aligned}$$

이므로 $T'(x) = \int_0^x f(k)dk$ 임을 알 수 있습니다.

즉, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 라고 두면

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x F(t)dt$$
라고 생각하면

편합니다.

종종 등장하는 형태이니 암기해 두시는 것도 추천합니다

조건 (가)에서

$$f(x) - 9 \int_0^x tf(x-t)dt = g(x)$$

의 양 변에 $x=0$ 을 대입한다.

$$f(0) = g(0) \dots\dots\ominus$$

이후 양 변을 미분한다.

$$f'(x) - 9 \int_0^x f(t)dt = g'(x)$$

다시 양 변에 $x=0$ 을 대입한다.

$$f'(0) = g'(0) \dots\dots\omin�$$

다시 한번 양 변을 미분한다.

$$f''(x) - 9f(x) = g''(x)$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 9인 이차함수 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f''(x) - 9f(x) = 18$$

이다. 함수 $f(x) = ae^{bx} + c$ 이고,

$f''(x) = ab^2e^{bx}$ 이기 때문에

$$a(b^2 - 9)e^{bx} - 9c = 18$$

로 항등식을 다시 정리할 수 있다.

이때, 모든 실수 x 에 대하여 위의 항등식을 만족하기 위해서는

e^{bx} 의 계수가 0이어야 하고,

동시에 $-9c = 18$ 이어야 한다.

$a \neq 0$ 이고, $b > 0$ 이므로

$$b = 3, c = -2$$

임을 알 수 있다.

지금까지의 내용을 정리하면

$$f(x) = ae^{3x} - 2$$

$$g(x) = 9x^2 + \dots$$

이다.

㉠, ㉡에 의해

$$g(0) = a - 2$$

$$g'(0) = 3a$$

이다.

$$\text{즉, } g(x) = 9x^2 + 3ax + a - 2$$

$$f'(x) - g'(x) = 3ae^{3x} - 18x - 3a$$

조건 (나)에 의해

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - g'(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3a(e^{3x} - 1) - 18x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3$$

이므로

$$\begin{aligned} 9a - 18 &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

그러므로

$$g(x) = 9x^2 + 6x$$

이고,

$$g(2) = 48$$

정답 : ㉢

기출 복습 : 2020학년도 6월 가형 20번

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x) > 0$

(나) $\ln f(x) + 2 \int_0^x (x-t)f(t) dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보 기>

ㄱ. $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 할 때,

$f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$ 이다.

- ① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 : ㉤

Comment : $\int_0^x (x-t)f(t) dt$ 과

$$\int_0^x tf(x-t) dt \text{ 꼴은 기출에서 자주 등장하는}$$

형태이다. x 에 대하여 미분했을 때 나타나는 관계를 익혀두자.

기출 복습 : 2026학년도 6월 미적분 28번

28. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 와
두 상수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^b$ 의 값은?

[4점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\left(f(x)\right)^5 + \left(f(x)\right)^3 + ax + b = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3) < 0, f'(2) > 0$

- ① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

정답 : ①

Comment : 본 문항과 마찬가지로, 주어진
항등식을 두 차례 미분하여 문제 해결에 필요한
핵심 관계를 얻는 문항이다.

29. 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ 이 수렴한다는 것을 통해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$$

임을 알 수 있다.

한편 조건 (가)에서

수열 $|a_n - b_n|$ 이 최소값을 가진다고 했다.

만약 $a_k - b_k = 0$ 을 만족하는 자연수 k 가 존재하지 않는다면, 모든 항이 양수이면서 0에 수렴하므로 $|a_n - b_n|$ 은 최소값을 갖지 않는다. 이는 조건 (가)에 모순이다.

따라서 반드시 $a_k - b_k = 0$ 을 만족하는 자연수 k 가 존재해야 하고, 이 수열의 최소값은 0이 된다.

$$\text{그러므로 } \frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{2} = 0.$$

수열 a_n 의 공비를 r_a 라고 한다면 $r_a = \frac{1}{2}$.

한편 조건(나)에서 $a_3 = -8b_3$ 라고 한다.

이를 정리하면

$$a_1 \times \frac{1}{4} = -8 \times b_1 \times (r_b)^2$$

$$\frac{a_1}{b_1} = -32(r_b)^2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

이다.

(b_1 은 수열 b_n 의 첫째항, r_b 는 수열 b_n 의 공비)

그리고 $a_k - b_k = 0$ 이므로

$$a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = b_1 (r_b)^{k-1}$$

이다.

이를 ⑦와 연립하면

$$-32(r_b)^2 = (2r_b)^{k-1}$$

$$-2^5 (r_b)^2 = 2^{k-1} (r_b)^{k-1}$$

$$(r_b)^{k-3} = -2^{6-k} = -8 \times 2^{3-k}$$

$$-8 = (2r_b)^{k-3}$$

한편, 수열 b_n 의 모든 항이 유리수이고

따라서 r_b 는 유리수이다.

동시에 k 는 자연수이기 때문에 가능한 순서쌍 (k, r_b) 는

$$(2, -\frac{1}{16}), (4, -4), (6, -1) \text{이 있다.}$$

이 중 수열 $a_n - b_n$ 이 수렴하려면

$$k=2, r_b = -\frac{1}{16} \text{ 이다.}$$

$$a_2 = b_2 = p$$

라고 하면

$$a_1 = 2p$$

$$b_1 = -16p$$

이고, 조건 (나)에 의해 $p > 0$ 이다.

또 $n \geq 2$ 이면

$$|a_n - b_n| \leq 2p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (-16p) \left(-\frac{1}{16}\right)^{n-1} \leq 2p$$

이고,

$$|a_1 - b_1| = 18p$$

이기 때문에

$n=1$ 에서 최대값을 가지는 것을 알 수 있다.

$$18p = 36$$

$$p = 2$$

$$S = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{-32}{1 + \frac{1}{16}} = (8 + \frac{16 \times 32}{17})$$

$$\frac{17}{8} \times S = 81$$

정답 : 81

30.

먼저 조건 (가)에서

$$f(x) = \int_{3\pi}^x \sqrt{1 - a^2 f(t)^2} dt$$

이므로

$$f(3\pi) = 0$$

이고,

양 변을 미분하면

$$f'(x) = \sqrt{1 - a^2 f(x)^2}$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \geq 0$$

이므로 함수 f 는 감소하지 않고,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{a}$$

이다.

$$f'(x) = \sqrt{1 - a^2 f(x)^2}$$

의 양변을 제곱하면

$$f'(x)^2 + a^2 f(x)^2 = 1$$

이다.

조건 (나)에 의해 구간 $(t, t + \frac{\pi}{a})$ 에서는

$$(bc)^2 \cos^2 cx + a^2 \times b^2 \sin^2 cx = 1$$

임을 알 수 있다.

특정 구간의 모든 실수 x 에 대하여 위 항등식을 만족하기 위해서는

$$(bc)^2 = (ab)^2 = 1$$

을 만족해야 한다. 그렇게 되면

$$\sin^2 cx + \cos^2 cx = 1$$

이 되어 조건을 만족한다.

a, b, c 모두 양수이고, 따라서

$$c = a, \quad b = \frac{1}{a}$$

이다.

따라서 구간 $(t, t + \frac{\pi}{a})$ 에서 함수

$f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{1}{a} \sin ax$$

이다.

한편, 함수 $f(x)$ 는 감소하지 않는 함수이고,

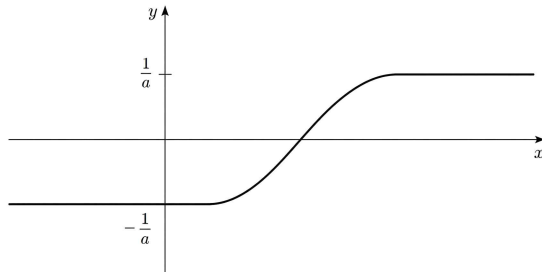
$|f(x)| \leq \frac{1}{a}$ 임을 구한 바 있다

$(t, t + \frac{\pi}{a})$ 에서 함수 $f(x)$ 는 반주기만큼 차지하고,

그 양 끝은 각각 $-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}$ 이다.

따라서 조건을 만족시키기 위해서 전체 함수는

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{a} & (x < t) \\ \frac{1}{a} \sin ax & (t \leq x < t + \frac{\pi}{a}) \\ \frac{1}{a} & (x \geq t + \frac{\pi}{a}) \end{cases}$$



임을 알 수 있다.

한편 $f(3\pi) = 0$ 이고 $f'(3\pi) > 0$ 이다.

따라서 $\frac{1}{a} \sin(3\pi a) = 0$ 인데, 이 중

$3\pi a = \text{홀수} \times \pi$ 라면 $f'(3\pi) < 0$ 이 되기 때문에

$$3\pi a = 2m\pi \quad (m \text{은 양의 정수})$$

이어야 한다. 따라서

$$a = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \dots$$

이다.

마지막으로 방정식 $f(x) = -\frac{3}{10}$ 이 실근을 가져야 한다.

함수 f 의 치역은 $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$

이므로

$$-\frac{3}{10} \geq -\frac{1}{a}$$

$$\text{즉, } a \leq \frac{10}{3}$$

을 만족해야 한다.

그러므로 집합A는

$$A = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3} \right\}$$

이다.

따라서 원소의 개수는

$$n = 5$$

이고, 가장 큰 원소는

$$a = \frac{10}{3}$$

$$a \times n = \frac{50}{3}$$

정답 : 53

기출 복습 : 2016학년도 B형 30번

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq b$ 일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$ 이다. (단, a, b, c 는 상수이다.)

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)} dt$ 이다.

$$\int_0^6 f(x) dx = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답 : 35

Comment : 제곱근을 포함한 적분식이 주어졌다면, 먼저 근호 안의 식이 0 이상이어야 한다는 점을 확인하자. 또한 적분으로 정의된 함수의 도함수가 0 이상임을 이용하면 함수의 증가성을 얻을 수 있다. 이 두 관찰을 풀이의

출발점으로 삼는다는 점에서 본 문항과 함께
살펴볼 만한 기출이다.